Examen de Física Atómica y Materia Condensada

Dr. José Jesús Carlos Quintanar Sierra

Instrucciones

Responde de forma clara y completa. Justifica tus respuestas y apóyate en los conceptos vistos en clase. En los ejercicios que lo indiquen, **realiza los diagramas solicitados** con cuidado, indicando todos los estados base y conexiones entre ellos.

1. Estados base y localización del electrón

(a) Explica físicamente qué representa el estado base $|n\rangle$ en una red cristalina unidimensional.

(b) Dibuja el diagrama de estados base del electrón para los estados $|n-1\rangle$, $|n\rangle$ y $|n+1\rangle$, indicando las conexiones o acoplamientos posibles entre ellos.

2. Amplitudes de probabilidad y normalización

(a) ¿Qué representa el coeficiente $C_n(t)$ en la expresión

$$|\phi(t)\rangle = \sum_n |n\rangle\, C_n(t)?$$

(b) ¿Qué condición deben cumplir los coeficientes $C_n(t)$ para que el estado esté normalizado?

3. Dinámica cuántica en la red

(a) A partir de la ecuación

$$i\hbar \frac{dC_n}{dt} = E_0 C_n - A(C_{n+1} + C_{n-1}),$$

explica el significado físico de los términos $E_0 C_n$ y $-A(C_{n+1} + C_{n-1})$.

(b) ¿Qué ocurriría con la propagación del electrón si $A = 0$?

4. Ondas estacionarias en la red

(a) Supón una solución de tipo onda

$$C_n(t) = a_n e^{-(i/\hbar)Et}.$$

Sustitúyela en la ecuación anterior y obtén la relación entre E y k.

(b) Explica el significado físico de esta relación en términos de bandas de energía.

5. Masa efectiva del electrón en el cristal

(a) A partir de la relación de dispersión obtenida,

$$E(k) = E_0 - 2A\cos(ka),$$

demuestra que la masa efectiva m^* del electrón está dada por

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E}{dk^2}.$$

(b) Evalúa m^* cerca del mínimo de energía ($k \approx 0$) y discute su significado físico.

Soluciones

1. Pregunta 1

   (a) El estado $|n\rangle$ representa al electrón localizado en el átomo número n. Es uno de los estados base ortonormales de la red cristalina discreta.

   b) Los tres estados se representan como puntos igualmente espaciados conectados por enlaces bidireccionales:

   $$|n-1\rangle \leftrightarrow |n\rangle \leftrightarrow |n+1\rangle\,.$$

   Cada enlace simboliza el acoplamiento cuántico A que permite el salto del electrón entre átomos vecinos.

2. Pregunta 2

   (a) $C_n(t)$ es la *amplitud de probabilidad* de encontrar al electrón en el átomo número n en el instante t.

   (b) Debe cumplirse la condición de normalización:

   $$\sum_n |C_n(t)|^2 = 1,$$

   lo que asegura que la probabilidad total de encontrar al electrón en la red sea igual a 1.

3. Pregunta 3

   (a) $E_0 C_n$ representa la energía del electrón cuando está ligado a un átomo. El término $-A(C_{n+1} + C_{n-1})$ describe la posibilidad de salto entre átomos vecinos: el acoplamiento cuántico entre sitios.

   (b) Si $A = 0$, el electrón queda completamente localizado y no puede desplazarse por la red: no hay propagación ni formación de bandas.

4. Pregunta 4

   (a) Sustituyendo:

   $$i\hbar(-i\omega)e^{i(kna-\omega t)} = E_0 e^{i(kna-\omega t)} - A[e^{i(k(n+1)a-\omega t)} + e^{i(k(n-1)a-\omega t)}],$$

   se obtiene:

   $$\hbar\omega = E_0 - 2A\cos(ka).$$

   (b) La energía depende del número de onda k, lo que implica que los electrones pueden ocupar una *banda continua de energías* en lugar de niveles discretos. Esta relación describe la **banda de energía** en el modelo de un electrón en una red cristalina.

5. Pregunta 5

(a) Derivando dos veces:

$$\frac{d^2E}{dk^2} = 2Aa^2\cos(ka).$$

Entonces,

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2Aa^2\cos(ka)}.$$

(b) Para $k \approx 0$, $\cos(ka) \approx 1$, y

$$m^* \approx \frac{\hbar^2}{2Aa^2}.$$

Una masa efectiva pequeña corresponde a una banda ancha (electrones muy móviles), mientras que una masa grande indica una banda estrecha y menor movilidad electrónica.